Définitions et généralités
Techniques pour prouver qu'une suite est bornée
Limite d'une suite réelle
Suites monotones et conséquences
Suites adjacentes
Suites extraites
Suite de Cauchy
Suites géométriques, arithmétiques et récurrentes

Les suites réelles

cours MIP

Soumia CHAIRA et Mohamed MALIKI

F.S.T. Mohammedia Université Hassan II

8th February 2011

Plan

1. Définitions et généralités
   - Définition
   - Suites explicites
   - Suites définies par récurrence
   - Suites bornées
2. Techniques pour prouver qu'une suite est bornée
   - Technique fonctionnelle pour les suites du type $u_n = f(n)$
   - Technique algébrique
   - Technique par récurrence : pratique pour les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Limite d'une suite réelle
   - Définitions générales
   - Propriétés des suites admettant une limite

Définitions

Définition

Une suite numérique d'éléments réels est une application

$$u : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$$

L'image $u(n)$ est noté u_n et appelé terme général de la suite.

La suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$.

Définitions

Définition

Une suite numérique d'éléments réels est une application

$$u : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$$

L'image $u(n)$ est noté u_n et appelé terme général de la suite.

La suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$.

Définitions

Définition

Une suite numérique d'éléments réels est une application

$$u : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$$

L'image $u(n)$ est noté u_n et appelé terme général de la suite.

La suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exemple

1. $u_n = (-1)^n$
2. $u_n = \dfrac{1-n}{1+n}$; $u_n = \cos(n\pi)$
3. $u_0 = 1 \quad u_{n+1} = 3u_n + 1$

Exemple

1. $u_n = (-1)^n$
2. $u_n = \dfrac{1-n}{1+n}$; $u_n = \cos(n\pi)$
3. $u_0 = 1 \quad u_{n+1} = 3u_n + 1$

Exemple

1. $u_n = (-1)^n$
2. $u_n = \dfrac{1-n}{1+n}$; $\quad u_n = \cos(n\pi)$
3. $u_0 = 1 \quad u_{n+1} = 3u_n + 1$

Plan

1. Définitions et généralités
   - Définition
   - Suites explicites
   - Suites définies par récurrence
   - Suites bornées
2. Techniques pour prouver qu'une suite est bornée
   - Technique fonctionnelle pour les suites du type $u_n = f(n)$
   - Technique algébrique
   - Technique par récurrence : pratique pour les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Limite d'une suite réelle
   - Définitions générales
   - Propriétés des suites admettant une limite

Suites explicites

Définition

Une suite numérique d'éléments réels est une suite explicite si

$$u_n = \varphi(n)$$

φ étant une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$.

Exemple

1. $u_n = (-1)^n$
2. $u_n = \dfrac{1-n}{1+n}$
3. $u_n = \cos(n\pi)$

Exemple

1. $u_n = (-1)^n$
2. $u_n = \dfrac{1-n}{1+n}$
3. $u_n = \cos(n\pi)$

Exemple

1. $u_n = (-1)^n$
2. $u_n = \dfrac{1-n}{1+n}$
3. $u_n = \cos(n\pi)$

Plan

1. Définitions et généralités
   - Définition
   - Suites explicites
   - Suites définies par récurrence
   - Suites bornées
2. Techniques pour prouver qu'une suite est bornée
   - Technique fonctionnelle pour les suites du type $u_n = f(n)$
   - Technique algébrique
   - Technique par récurrence : pratique pour les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Limite d'une suite réelle
   - Définitions générales
   - Propriétés des suites admettant une limite

Suites définies par récurrence

Définition

Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, et soit a un élément de $\mathbf{R}$.
On peut définir une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbf{R}$ par :

- La donnée de son terme initial $u_0 = a$;
- La relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

On dit alors que $(u_n)_n$ est définie par récurrence.

Suites définies par récurrence

Définition

Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, et soit a un élément de $\mathbf{R}$.
On peut définir une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbf{R}$ par :

- La donnée de son terme initial $u_0 = a$;
- La relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

On dit alors que $(u_n)_n$ est définie par récurrence.

Suites définies par récurrence

Définition

Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, et soit a un élément de $\mathbf{R}$.
On peut définir une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbf{R}$ par :

- La donnée de son terme initial $u_0 = a$;
- La relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

On dit alors que $(u_n)_n$ est définie par récurrence.

Exemple

1. $u_0 = 1 \quad u_{n+1} = 3u_n + 1$
2. $u_0 = 1 \quad u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n}$

Exemple

1. $u_0 = 1 \quad u_{n+1} = 3u_n + 1$
2. $u_0 = 1 \quad u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n}$

REMARQUE :

Si f n'est définie que sur une partie D de $\mathbf{R}$, il faut vérifier, pour assurer l'existence de la suite que :

- $a \in D$;
- pour tout n de $\mathbf{N}$: $u_n \in D \Rightarrow u_{n+1} \in D$.

En d'autres termes, assurer la stabilité de D par f.

Plan

1. Définitions et généralités
   - Définition
   - Suites explicites
   - Suites définies par récurrence
   - Suites bornées
2. Techniques pour prouver qu'une suite est bornée
   - Technique fonctionnelle pour les suites du type $u_n = f(n)$
   - Technique algébrique
   - Technique par récurrence : pratique pour les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Limite d'une suite réelle
   - Définitions générales
   - Propriétés des suites admettant une limite

Suites bornées

Définition

- On dit que $(u_n)_n$ est majorée si et seulement si:

$$\exists\, M \in \mathbf{R},\quad \forall\, n \in \mathbf{N},\quad u_n \leq M$$

- On dit que $(u_n)_n$ est minorée si et seulement si:

$$\exists\, m \in \mathbf{R},\quad \forall\, n \in \mathbf{N},\quad u_n \geq m$$

- **Attention :** M et m ne dépendent pas de n.

Suites bornées

Définition

- On dit que $(u_n)_n$ est majorée si et seulement si:

$$\exists\, M \in \mathbf{R},\quad \forall\, n \in \mathbf{N},\quad u_n \leq M$$

- On dit que $(u_n)_n$ est minorée si et seulement si:

$$\exists\, m \in \mathbf{R},\quad \forall\, n \in \mathbf{N},\quad u_n \geq m$$

- **Attention :** M et m ne dépendent pas de n.

Suites bornées

Définition

- On dit que $(u_n)_n$ est majorée si et seulement si:

$$\exists\, M \in \mathbf{R},\quad \forall\, n \in \mathbf{N},\quad u_n \leq M$$

- On dit que $(u_n)_n$ est minorée si et seulement si:

$$\exists\, m \in \mathbf{R},\quad \forall\, n \in \mathbf{N},\quad u_n \geq m$$

- **Attention :** M et m ne dépendent pas de n.

Suite bornée

Proposition

- $(u_n)_n$ *est bornée si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.*

- $(u_n)_n$ *est bornée si et seulement si*

$$\exists M \in \mathbf{R}^{*+}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_n| \leq M$$

Suite bornée

Proposition

- $(u_n)_n$ *est bornée si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.*

- $(u_n)_n$ *est bornée si et seulement si*

$$\exists\, M \in \boldsymbol{R}^{*+},\ \ \forall\, n \in \boldsymbol{N},\quad |u_n| \leq M$$

Exemple

1. $u_n = 1 + \dfrac{1}{2n+1}$
   est une suite majorée par 2 et minorée par 1, donc bornée
2. $u_n = e^n$
   est une suite minorée par 0 et non majorée, donc n'est pas bornée.

Exemple

1. $u_n = 1 + \dfrac{1}{2n+1}$
   est une suite majorée par 2 et minorée par 1, donc bornée
2. $u_n = e^n$
   est une suite minorée par 0 et non majorée, donc n'est pas bornée.

Exemple

1. $u_n = 1 + \dfrac{1}{2n+1}$
   est une suite majorée par 2 et minorée par 1, donc bornée
2. $u_n = e^n$
   est une suite minorée par 0 et non majorée, donc n'est pas bornée.

Exemple

1. $u_n = 1 + \dfrac{1}{2n+1}$
   est une suite majorée par 2 et minorée par 1, donc bornée
2. $u_n = e^n$
   est une suite minorée par 0 et non majorée, donc n'est pas bornée.

Plan

1. Définitions et généralités
   - Définition
   - Suites explicites
   - Suites définies par récurrence
   - Suites bornées
2. Techniques pour prouver qu'une suite est bornée
   - Technique fonctionnelle pour les suites du type $u_n = f(n)$
   - Technique algébrique
   - Technique par récurrence : pratique pour les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Limite d'une suite réelle
   - Définitions générales
   - Propriétés des suites admettant une limite

Technique fonctionnelle

Exemple

$$u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+5}.$$

Considérons f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+5}$

f est croissante sur $[0,+\infty[$ car $f' \geq 0$.

On a $f(0) = 1/5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

La suite $(u_n)_n$ est bornée par $1/5$ et 2.

Technique fonctionnelle

Exemple

$$u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+5}.$$

Considérons f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+5}$

f est croissante sur $[0,+\infty[$ car $f' \geq 0$.

On a $f(0) = 1/5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

La suite $(u_n)_n$ est bornée par $1/5$ et 2.

Technique fonctionnelle

Exemple

$$u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+5}.$$

Considérons f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+5}$

f est croissante sur $[0,+\infty[$ car $f' \geq 0$.

On a $f(0) = 1/5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

La suite $(u_n)_n$ est bornée par $1/5$ et 2.

Technique fonctionnelle

Exemple

$$u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+5}.$$

Considérons f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+5}$

f est croissante sur $[0,+\infty[$ car $f' \geq 0$.

On a $f(0) = 1/5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

La suite $(u_n)_n$ est bornée par $1/5$ et 2.

Technique fonctionnelle

Exemple

$$u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+5}.$$

Considérons f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+5}$

f est croissante sur $[0,+\infty[$ car $f' \geq 0$.

On a $f(0) = 1/5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

La suite $(u_n)_n$ est bornée par $1/5$ et 2.

Plan

1. Définitions et généralités
   - Définition
   - Suites explicites
   - Suites définies par récurrence
   - Suites bornées
2. Techniques pour prouver qu'une suite est bornée
   - Technique fonctionnelle pour les suites du type $u_n = f(n)$
   - Technique algébrique
   - Technique par récurrence : pratique pour les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Limite d'une suite réelle
   - Définitions générales
   - Propriétés des suites admettant une limite

Technique algébrique : manipulation d'inégalités

Exemple

Exemple 1. $u_n = \dfrac{(-1)^n + \sin n}{n^2}$, pour $n \in \mathbf{N}^*$

On a : $-2 \leq (-1)^n + \sin n \leq 2$ et $0 < \frac{1}{n^2} \leq 1$ $(n \geq 1)$

D'où : $-2 \leq u_n \leq 2$

La suite $(u_n)_n$ est donc bornée.

Technique algébrique : manipulation d'inégalités

Exemple

Exemple 1. $u_n = \dfrac{(-1)^n + \sin n}{n^2}$, pour $n \in \mathbf{N}^*$

On a : $-2 \leq (-1)^n + \sin n \leq 2$ et $0 < \frac{1}{n^2} \leq 1$ $(n \geq 1)$

D'où : $-2 \leq u_n \leq 2$

La suite $(u_n)_n$ est donc bornée.

Technique algébrique : manipulation d'inégalités

Exemple

Exemple 1. $u_n = \dfrac{(-1)^n + \sin n}{n^2}$, pour $n \in \mathbf{N}^*$

On a : $-2 \leq (-1)^n + \sin n \leq 2$ et $0 < \frac{1}{n^2} \leq 1$ $(n \geq 1)$

D'où : $-2 \leq u_n \leq 2$

La suite $(u_n)_n$ est donc bornée.

Technique algébrique : manipulation d'inégalités

Exemple

Exemple 1. $u_n = \dfrac{(-1)^n + \sin n}{n^2}$, pour $n \in \mathbf{N}^*$

On a : $-2 \leq (-1)^n + \sin n \leq 2$ et $0 < \frac{1}{n^2} \leq 1$ $(n \geq 1)$

D'où : $-2 \leq u_n \leq 2$

La suite $(u_n)_n$ est donc bornée.

Techniques algébriques : manipulation d'inégalités

Exemple

Exemple 2. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, pour $n \in \mathbf{N}^*$

Montrons que $(u_n)_n$ est majorée par 2.

Pour $k \geq 2$: $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2$$

La suite $(u_n)_n$ est donc majorée par 2.

Techniques algébriques : manipulation d'inégalités

Exemple

Exemple 2. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, pour $n \in \mathbf{N}^*$

Montrons que $(u_n)_n$ est majorée par 2.

Pour $k \geq 2$: $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2$$

La suite $(u_n)_n$ est donc majorée par 2.

Techniques algébriques : manipulation d'inégalités

Exemple

Exemple 2. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, pour $n \in \mathbf{N}^*$

Montrons que $(u_n)_n$ est majorée par 2.

Pour $k \geq 2$: $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2$$

La suite $(u_n)_n$ est donc majorée par 2.

Techniques algébriques : manipulation d'inégalités

Exemple

Exemple 2. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, pour $n \in \mathbf{N}^*$

Montrons que $(u_n)_n$ est majorée par 2.

Pour $k \geq 2$: $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2$$

La suite $(u_n)_n$ est donc majorée par 2.

Techniques algébriques : manipulation d'inégalités

Exemple

Exemple 2. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, pour $n \in \mathbf{N}^*$

Montrons que $(u_n)_n$ est majorée par 2.

Pour $k \geq 2$: $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2$$

La suite $(u_n)_n$ est donc majorée par 2.

Plan

1. Définitions et généralités
   - Définition
   - Suites explicites
   - Suites définies par récurrence
   - Suites bornées
2. Techniques pour prouver qu'une suite est bornée
   - Technique fonctionnelle pour les suites du type $u_n = f(n)$
   - Technique algébrique
   - Technique par récurrence : pratique pour les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Limite d'une suite réelle
   - Définitions générales
   - Propriétés des suites admettant une limite

Technique par récurrence pour les suites de type : $u_{n+1} = f(u_n)$

Exemple

$$u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}; \quad u_0 = 0$$

On démontre par récurrence la propriété P définie pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$P(n) : 0 \leq u_n \leq 3.$$

Technique par récurrence pour les suites de type : $u_{n+1} = f(u_n)$

Exemple

$$u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}; \quad u_0 = 0$$

On démontre par récurrence la propriété P définie pour $n \in \mathbf{N}$, par :

$$P(n) : 0 \leq u_n \leq 3.$$

Plan

1. Définitions et généralités
   - Définition
   - Suites explicites
   - Suites définies par récurrence
   - Suites bornées
2. Techniques pour prouver qu'une suite est bornée
   - Technique fonctionnelle pour les suites du type $u_n = f(n)$
   - Technique algébrique
   - Technique par récurrence : pratique pour les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Limite d'une suite réelle
   - Définitions générales
   - Propriétés des suites admettant une limite

Limites d'une suite réelle

Définition

- On dit que $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ (quand n tend vers $+\infty$) si :

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbf{N}, \quad n \geq N \Rightarrow u_n > A$$

- On dit que $(u_n)_n$ tend vers $-\infty$ (quand n tend vers $+\infty$) si :

$$\forall B < 0, \quad \exists N \in \mathbf{N}, \quad n \geq N \Rightarrow u_n < B$$

- On dit que $(u_n)_n$ tend vers l (quand n tend vers $+\infty$) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbf{N}, \quad n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

REMARQUE :

Une suite peut très bien ne posséder aucune limite.

C'est le cas de la suite dite **alternée**, de terme général $(-1)^n$.

REMARQUE :

Une suite peut très bien ne posséder aucune limite.

C'est le cas de la suite dite **alternée**, de terme général $(-1)^n$.

Suite convergente ou divergente

Définition

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique.

- On dit que $(u_n)_n$ est convergente si elle admet une limite dans $\mathbf{R}$.
- Dans le cas contraire, on dit que $(u_n)_n$ est divergente.

Suite convergente ou divergente

Définition

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique.

- On dit que $(u_n)_n$ est convergente si elle admet une limite dans $\mathbf{R}$.
- Dans le cas contraire, on dit que $(u_n)_n$ est divergente.

Exemple

1. $u_n = \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
2. $u_n = (-1)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas
3. $u_n = \dfrac{1-n}{1+n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$
4. $u_n = n^2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exemple

1. $u_n = \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
2. $u_n = (-1)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas
3. $u_n = \dfrac{1-n}{1+n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$
4. $u_n = n^2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exemple

1. $u_n = \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
2. $u_n = (-1)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas
3. $u_n = \dfrac{1-n}{1+n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$
4. $u_n = n^2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exemple

1. $u_n = \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
2. $u_n = (-1)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas
3. $u_n = \dfrac{1-n}{1+n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$
4. $u_n = n^2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exemple

1. $u_n = \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
2. $u_n = (-1)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas
3. $u_n = \dfrac{1-n}{1+n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$
4. $u_n = n^2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exemple

1. $u_n = \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
2. $u_n = (-1)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas
3. $u_n = \dfrac{1-n}{1+n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$
4. $u_n = n^2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exemple

1. $u_n = \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
2. $u_n = (-1)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas
3. $u_n = \dfrac{1-n}{1+n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$
4. $u_n = n^2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exemple

1. $u_n = \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
2. $u_n = (-1)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas
3. $u_n = \dfrac{1-n}{1+n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$
4. $u_n = n^2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exemple

Montrer à l'aide de la définition que $\lim_{n\to+\infty}(\frac{n}{n^2+1}) = 1.$

Unicité de la limite

Proposition

La limite d'une suite, lorsqu'elle existe, est unique.

Plan

1. Définitions et généralités
   - Définition
   - Suites explicites
   - Suites définies par récurrence
   - Suites bornées
2. Techniques pour prouver qu'une suite est bornée
   - Technique fonctionnelle pour les suites du type $u_n = f(n)$
   - Technique algébrique
   - Technique par récurrence : pratique pour les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Limite d'une suite réelle
   - Définitions générales
   - Propriétés des suites admettant une limite

Proposition

Toute suite convergente est bornée.

REMARQUE :
La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la suite alternée de terme général $(-1)^n$.

Proposition

Si $(u_n)_n$ est une suite bornée et $(v_n)_n$ est une suite de limite nulle alors

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = 0$$

Exemple

1. $u_n = \sin n$, $v_n = \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$
2. $u_n = n$, $v_n = \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n.\dfrac{1}{n} \neq 0$

Exemple

1. $u_n = \sin n,\ v_n = \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$
2. $u_n = n,\ v_n = \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n.\dfrac{1}{n} \neq 0$

Exemple

1. $u_n = \sin n,\ v_n = \dfrac{1}{n}, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$
2. $u_n = n,\ v_n = \dfrac{1}{n}, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n.\dfrac{1}{n} \neq 0$

Exemple

1. $u_n = \sin n,\ v_n = \dfrac{1}{n}, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$
2. $u_n = n, \quad v_n = \dfrac{1}{n}, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n.\dfrac{1}{n} \neq 0$

Exemple

1. $u_n = \sin n,\ v_n = \dfrac{1}{n}, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$
2. $u_n = n, \quad v_n = \dfrac{1}{n}, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n.\dfrac{1}{n} \neq 0$

Exemple

1. $u_n = \sin n,\ v_n = \dfrac{1}{n}, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$
2. $u_n = n, \quad v_n = \dfrac{1}{n}, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n.\dfrac{1}{n} \neq 0$

Proposition

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles de limites respectives l et l'.
S'il existe un entier n_0 tel que $(n \geq n_0 \rightarrow u_n \leq v_n)$, alors $l \leq l'$.

REMARQUES :

- L'inégalité devient large par passage à la limite. $(n \geq n_0 \rightarrow u_n < v_n)$, alors $l \leq l'$
- Cas particulier : Si $(n \geq n_0 \rightarrow u_n \leq \lambda)$, alors $l \leq \lambda$

REMARQUES :

- L'inégalité devient large par passage à la limite.
  $(n \geq n_0 \rightarrow u_n < v_n)$, alors $l \leq l'$
- Cas particulier : Si $(n \geq n_0 \rightarrow u_n \leq \lambda)$, alors $l \leq \lambda$

Théorème des gendarmes

Proposition

Soit $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ des suites réelles telles que

$$v_n \leq u_n \leq w_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

Théorème des gendarmes

Proposition

Soit $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ des suites réelles telles que

$$v_n \leq u_n \leq w_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Théorème des gendarmes

Proposition

Soit $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ des suites réelles telles que

$$v_n \leq u_n \leq w_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Théorème des gendarmes

Proposition

Soit $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ *et* $(w_n)_n$ *des suites réelles telles que*

$$v_n \leq u_n \leq w_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Proposition

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ des suites réelles telles que $u_n \leq v_n$.

1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Proposition

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ des suites réelles telles que $u_n \leq v_n$.

1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Proposition

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ des suites réelles telles que $u_n \leq v_n$.

1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Proposition

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ des suites réelles telles que $u_n \leq v_n$.

1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Proposition

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ des suites réelles telles que $u_n \leq v_n$.

1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exemple

Calculer la limite de la suite numérique $(u_n)_n$

1. $$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k}$$

2. $$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

Exemple

Calculer la limite de la suite numérique $(u_n)_n$

1. $$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k}$$

2. $$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

Plan

1. Définitions et généralités
   - Définition
   - Suites explicites
   - Suites définies par récurrence
   - Suites bornées
2. Techniques pour prouver qu'une suite est bornée
   - Technique fonctionnelle pour les suites du type $u_n = f(n)$
   - Technique algébrique
   - Technique par récurrence : pratique pour les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Limite d'une suite réelle
   - Définitions générales
   - Propriétés des suites admettant une limite

Opérations sur les limites finies

Proposition

Soit (u_n) et (v_n) des suites reélles de limites respectives l et l'.

1. $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=l+l'$
2. $\lim_{n\to+\infty}(u_n.v_n)=l.l'$
3. *Si* $l'\neq 0$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} 1/v_n = 1/l'$
4. $\lim_{n\to+\infty}|u_n|=|l|$
5. *Si* $\lim_{n\to+\infty}|u_n|=0$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Opérations sur les limites finies

Proposition

Soit (u_n) et (v_n) des suites reélles de limites respectives l et l'.

1. $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = l + l'$
2. $\lim_{n\to+\infty}(u_n.v_n) = l.l'$
3. *Si* $l' \neq 0$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} 1/v_n = 1/l'$
4. $\lim_{n\to+\infty}|u_n| = |l|$
5. *Si* $\lim_{n\to+\infty}|u_n| = 0$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Opérations sur les limites finies

Proposition

Soit (u_n) et (v_n) des suites reélles de limites respectives l et l'.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=l+l'$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n.v_n)=l.l'$
3. *Si* $l'\neq 0$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/v_n = 1/l'$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=|l|$
5. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=0$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

Opérations sur les limites finies

Proposition

Soit (u_n) et (v_n) des suites reélles de limites respectives l et l'.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=l+l'$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n.v_n)=l.l'$
3. *Si* $l'\neq 0$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}1/v_n=1/l'$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=|l|$
5. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=0$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

Opérations sur les limites finies

Proposition

Soit (u_n) et (v_n) des suites reélles de limites respectives l et l'.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=l+l'$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n.v_n)=l.l'$
3. *Si* $l'\neq 0$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/v_n = 1/l'$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=|l|$
5. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=0$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

Opérations sur les limites finies

Proposition

Soit (u_n) et (v_n) des suites reélles de limites respectives l et l'.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=l+l'$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n.v_n)=l.l'$
3. *Si* $l'\neq 0$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}1/v_n=1/l'$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=|l|$
5. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=0$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

Plan

1. Définitions et généralités
   - Définition
   - Suites explicites
   - Suites définies par récurrence
   - Suites bornées
2. Techniques pour prouver qu'une suite est bornée
   - Technique fonctionnelle pour les suites du type $u_n = f(n)$
   - Technique algébrique
   - Technique par récurrence : pratique pour les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Limite d'une suite réelle
   - Définitions générales
   - Propriétés des suites admettant une limite

Nous allons énoncer les règles de calculs sur les limites par des tableaux. La notation F.I. signifie forme indéterminée. Chaque cas nécessite une étude détaillée pour lever cette indétermination.

Addition

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$l + l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI

Produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	$l>0$	$l<0$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$	$l \times l'$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$

Quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	$l \neq 0$	0	l	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l' \neq 0$	0	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{l}{l'}$	$\pm\infty$	FI	0	FI

Plan

1. Définitions et généralités
   - Définition
   - Suites explicites
   - Suites définies par récurrence
   - Suites bornées
2. Techniques pour prouver qu'une suite est bornée
   - Technique fonctionnelle pour les suites du type $u_n = f(n)$
   - Technique algébrique
   - Technique par récurrence : pratique pour les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Limite d'une suite réelle
   - Définitions générales
   - Propriétés des suites admettant une limite

- Pour lever une telle indétermination, des F.I du type $+\infty - \infty$, on factorise le terme qui croit le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$.

- Pour lever une telle indétermination, des F.I du type $\frac{\infty}{\infty}$, On factorise le terme qui croit le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$ au numérateur et au dénominateur.

- Pour lever une telle indétermination, des F.I du type $+\infty - \infty$, on factorise le terme qui croit le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$.

- Pour lever une telle indétermination, des F.I du type $\frac{\infty}{\infty}$, On factorise le terme qui croit le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$ au numérateur et au dénominateur.

- Pour lever une telle indétermination, des F.I du type $\frac{0}{0}$, on factorise le terme qui décroît le plus vite en valeur absolue vers 0 au numérateur et au dénominateur.

- Pour lever une telle indétermination, des F.I du type $0 \times \infty$, on factorise dans le premier facteur le terme qui décroît le plus vite en valeur absolue vers 0 et dans le second facteur le terme qui croit le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$.

- Pour lever une telle indétermination, des F.I du type $\frac{0}{0}$, on factorise le terme qui décroît le plus vite en valeur absolue vers 0 au numérateur et au dénominateur.

- Pour lever une telle indétermination, des F.I du type $0 \times \infty$, on factorise dans le premier facteur le terme qui décroît le plus vite en valeur absolue vers 0 et dans le second facteur le terme qui croit le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$.

Exemple

1. $u_n = 3^n - 10^n = 10^n((\frac{3}{10})^n - 1)$

   On a $(\frac{3}{10})^n - 1 \to -1$ et $10^n \to +\infty$ alors $3^n - 10^n \to -\infty$.

2. $$\frac{n^4 - 10n^3 + 2}{3n^4 - 1} = \frac{n^4(1 - \frac{10}{n} + \frac{2}{n^4})}{n^4(3 - \frac{1}{n^4})} = \frac{1 - \frac{10}{n} + \frac{2}{n^4}}{1 - \frac{3}{n^4}}$$

   donc $\frac{n^4 - 10n^3 + 2}{3n^4 - 1} \to \frac{1}{3}$.

Exemple

1. $u_n = 3^n - 10^n = 10^n((\frac{3}{10})^n - 1)$

   On a $(\frac{3}{10})^n - 1 \to -1$ et $10^n \to +\infty$ alors $3^n - 10^n \to -\infty$.

2. $$\frac{n^4 - 10n^3 + 2}{3n^4 - 1} = \frac{n^4(1 - \frac{10}{n} + \frac{2}{n^4})}{n^4(3 - \frac{1}{n^4})} = \frac{1 - \frac{10}{n} + \frac{2}{n^4}}{1 - \frac{3}{n^4}}$$

   donc $\frac{n^4 - 10n^3 + 2}{3n^4 - 1} \to \frac{1}{3}$.

Exemple

1. $u_n = 3^n - 10^n = 10^n((\frac{3}{10})^n - 1)$

   On a $(\frac{3}{10})^n - 1 \to -1$ et $10^n \to +\infty$ alors $3^n - 10^n \to -\infty$.

2. $$\frac{n^4 - 10n^3 + 2}{3n^4 - 1} = \frac{n^4(1 - \frac{10}{n} + \frac{2}{n^4})}{n^4(3 - \frac{1}{n^4})} = \frac{1 - \frac{10}{n} + \frac{2}{n^4}}{1 - \frac{3}{n^4}}$$

   donc $\frac{n^4 - 10n^3 + 2}{3n^4 - 1} \to \frac{1}{3}$.

Exemple

1. $u_n = 3^n - 10^n = 10^n((\frac{3}{10})^n - 1)$

   On a $(\frac{3}{10})^n - 1 \to -1$ et $10^n \to +\infty$ alors $3^n - 10^n \to -\infty$.

2. $$\frac{n^4 - 10n^3 + 2}{3n^4 - 1} = \frac{n^4(1 - \frac{10}{n} + \frac{2}{n^4})}{n^4(3 - \frac{1}{n^4})} = \frac{1 - \frac{10}{n} + \frac{2}{n^4}}{1 - \frac{3}{n^4}}$$

   donc $\frac{n^4 - 10n^3 + 2}{3n^4 - 1} \to \frac{1}{3}$.

Exemple

1. $u_n = 3^n - 10^n = 10^n((\frac{3}{10})^n - 1)$

   On a $(\frac{3}{10})^n - 1 \to -1$ et $10^n \to +\infty$ alors $3^n - 10^n \to -\infty$.

2. $$\frac{n^4 - 10n^3 + 2}{3n^4 - 1} = \frac{n^4(1 - \frac{10}{n} + \frac{2}{n^4})}{n^4(3 - \frac{1}{n^4})} = \frac{1 - \frac{10}{n} + \frac{2}{n^4}}{1 - \frac{3}{n^4}}$$

   donc $\frac{n^4 - 10n^3 + 2}{3n^4 - 1} \to \frac{1}{3}$.

Exemple

1. $u_n = 3^n - 10^n = 10^n((\frac{3}{10})^n - 1)$

   On a $(\frac{3}{10})^n - 1 \to -1$ et $10^n \to +\infty$ alors $3^n - 10^n \to -\infty$.

2. $$\frac{n^4 - 10n^3 + 2}{3n^4 - 1} = \frac{n^4(1 - \frac{10}{n} + \frac{2}{n^4})}{n^4(3 - \frac{1}{n^4})} = \frac{1 - \frac{10}{n} + \frac{2}{n^4}}{1 - \frac{3}{n^4}}$$

   donc $\frac{n^4 - 10n^3 + 2}{3n^4 - 1} \to \frac{1}{3}$.

Plan

1. Définitions et généralités
   - Définition
   - Suites explicites
   - Suites définies par récurrence
   - Suites bornées
2. Techniques pour prouver qu'une suite est bornée
   - Technique fonctionnelle pour les suites du type $u_n = f(n)$
   - Technique algébrique
   - Technique par récurrence : pratique pour les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Limite d'une suite réelle
   - Définitions générales
   - Propriétés des suites admettant une limite

Suite monotone

Définition

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

1. $(u_n)_n$ est dite croissante (resp. strictement croissante) ssi $\forall\ n \in \mathbf{N}\quad u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $\forall\ n \in \mathbf{N}\quad u_{n+1} > u_n$)
2. $(u_n)_n$ est dite décroissante (resp. strictement décroissante) ssi $\forall\ n \in \mathbf{N}\quad u_{n+1} \leq u_n$ (resp. $\forall\ n \in \mathbf{N}\quad u_{n+1} < u_n$)

Suite monotone

Définition

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

1. $(u_n)_n$ est dite croissante (resp. strictement croissante) ssi $\forall\ n \in \mathbf{N}\quad u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $\forall\ n \in \mathbf{N}\quad u_{n+1} > u_n$)
2. $(u_n)_n$ est dite décroissante (resp. strictement décroissante) ssi $\forall\ n \in \mathbf{N}\quad u_{n+1} \leq u_n$ (resp. $\forall\ n \in \mathbf{N}\quad u_{n+1} < u_n$)

Suite monotone

Définition

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

1. $(u_n)_n$ est dite croissante (resp. strictement croissante) ssi $\forall\ n \in \mathbb{N}\quad u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $\forall\ n \in \mathbb{N}\quad u_{n+1} > u_n$)
2. $(u_n)_n$ est dite décroissante (resp. strictement décroissante) ssi $\forall\ n \in \mathbb{N}\quad u_{n+1} \leq u_n$ (resp. $\forall\ n \in \mathbb{N}\quad u_{n+1} < u_n$)

Suite monotone

Définition

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

1. $(u_n)_n$ est dite croissante (resp. strictement croissante) ssi $\forall\ n \in \mathbf{N}\quad u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $\forall\ n \in \mathbf{N}\quad u_{n+1} > u_n$)
2. $(u_n)_n$ est dite décroissante (resp. strictement décroissante) ssi $\forall\ n \in \mathbf{N}\quad u_{n+1} \leq u_n$ (resp. $\forall\ n \in \mathbf{N}\quad u_{n+1} < u_n$)

Plan

1. Définitions et généralités
   - Définition
   - Suites explicites
   - Suites définies par récurrence
   - Suites bornées
2. Techniques pour prouver qu'une suite est bornée
   - Technique fonctionnelle pour les suites du type $u_n = f(n)$
   - Technique algébrique
   - Technique par récurrence : pratique pour les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Limite d'une suite réelle
   - Définitions générales
   - Propriétés des suites admettant une limite

Technique fonctionnelle : utilisable pour les suites du type $u_n = \varphi(n)$

Théorème

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique définie par $u_n = \varphi(n)$ où φ est définie sur un intervalle du type $[a, +\infty[$ où $a \in \mathbf{R}$

Si φ est monotone sur $[a, +\infty[$ alors :

- *$(u_n)_n$ est monotone sur $[E(a) + 1, +\infty[$*
- *$(u_n)_n$ possède le même sens de monotonie que φ.*

Technique fonctionnelle : utilisable pour les suites du type $u_n = \varphi(n)$

Théorème

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique définie par $u_n = \varphi(n)$ où φ est définie sur un intervalle du type $[a, +\infty[$ où $a \in \mathbf{R}$
Si φ est monotone sur $[a, +\infty[$ alors :

- *$(u_n)_n$ est monotone sur $[E(a) + 1, +\infty[$*
- *$(u_n)_n$ possède le même sens de monotonie que φ.*

Technique fonctionnelle : utilisable pour les suites du type $u_n = \varphi(n)$

Théorème

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique définie par $u_n = \varphi(n)$ où φ est définie sur un intervalle du type $[a, +\infty[$ où $a \in \boldsymbol{R}$
Si φ est monotone sur $[a, +\infty[$ alors :

- *$(u_n)_n$ est monotone sur $[E(a) + 1, +\infty[$*
- *$(u_n)_n$ possède le même sens de monotonie que φ.*

Technique fonctionnelle : utilisable pour les suites du type $u_n = \varphi(n)$

Théorème

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique définie par $u_n = \varphi(n)$ où φ est définie sur un intervalle du type $[a, +\infty[$ où $a \in \mathbf{R}$
Si φ est monotone sur $[a, +\infty[$ alors :

- *$(u_n)_n$ est monotone sur $[E(a) + 1, +\infty[$*
- *$(u_n)_n$ possède le même sens de monotonie que φ.*

Exemple

1. $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+5}$

Considérons φ définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+5}$$

φ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et

$$\varphi'(x) = \frac{18x}{(x^2+5)^2} > 0$$

La suite $(u_n)_n$ est donc strictement croissante.

Exemple

1. $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+5}$

   Considérons φ définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+5}$$

φ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et

$$\varphi'(x) = \frac{18x}{(x^2+5)^2} > 0$$

La suite $(u_n)_n$ est donc strictement croissante.

Exemple

1. $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+5}$

   Considérons φ définie sur $[0,+\infty[$ par :

   $$\varphi(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+5}$$

   φ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et

   $$\varphi'(x) = \frac{18x}{(x^2+5)^2} > 0$$

   La suite $(u_n)_n$ est donc strictement croissante.

Exemple

1. $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+5}$

   Considérons φ définie sur $[0,+\infty[$ par :

   $$\varphi(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+5}$$

   φ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et

   $$\varphi'(x) = \frac{18x}{(x^2+5)^2} > 0$$

   La suite $(u_n)_n$ est donc strictement croissante.

Techniques algébriques

C'est l'utilisation pur et simple de la définition :
$(u_n)_n$ est croissante $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$

Exemple

1. $u_n = \dfrac{1}{n}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n^2+n} < 0$$

La suite $(u_n)_n$ est donc strictement décroissante.

Exemple

1. $u_n = \dfrac{1}{n}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n^2+n} < 0$$

La suite $(u_n)_n$ est donc strictement décroissante.

Variante

Soit $(u_n)_n$ une suite à termes STRICTEMENT POSITIFS

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors u_n est croissante.
- Si $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors u_n est décroissante.

Variante

Soit $(u_n)_n$ une suite à termes STRICTEMENT POSITIFS

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors u_n est croissante.
- Si $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors u_n est décroissante.

Variante

Soit $(u_n)_n$ une suite à termes STRICTEMENT POSITIFS

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors u_n est croissante.
- Si $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors u_n est décroissante.

Exemple

1. $u_n = \dfrac{(2n)!}{n!}$

   La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est à termes STRICTEMENT POSITIFS.

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!n!}{(2n)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} = 2(2n+1) > 1$$

   La suite $(u_n)_n$ est donc strictement croissante.

Exemple

1. $u_n = \dfrac{(2n)!}{n!}$

   La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est à termes STRICTEMENT POSITIFS.

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!n!}{(2n)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} = 2(2n+1) > 1$$

   La suite $(u_n)_n$ est donc strictement croissante.

Exemple

1. $u_n = \dfrac{(2n)!}{n!}$

   La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est à termes STRICTEMENT POSITIFS.

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!n!}{(2n)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} = 2(2n+1) > 1$$

   La suite $(u_n)_n$ est donc strictement croissante.

Technique par récurrence pour les suites de type : $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f continue sur I. Soit $(u_n)_n$ définie par

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Supposons que f est monotone sur I.

Cas 1: f est croissante

Proposition

f est croissante alors :

1. *Si $u_0 \leq u_1$ alors $(u_n)_n$ est croissante.*
2. *Si $u_0 \geq u_1$ alors $(u_n)_n$ est décroissante.*

Cas 2: f est décroissante

Proposition

Si f est décroissante alors $g = f \circ f$ est croissante:
On définit deux nouvelles suites récurrentes:

$$v_0 = u_0 \quad v_{n+1} = g(v_n) \quad \Rightarrow \quad v_n = u_{2n}$$

$$w_0 = u_1 \quad w_{n+1} = g(w_n) \quad \Rightarrow \quad w_n = u_{2n+1}$$

1. *Si $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont convergentes vers la même limite l alors $(u_n)_n$ converge vers l.*
2. *Sinon, $(u_n)_n$ diverge.*

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite récurrente : $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si $(u_n)_n$ est une suite convergente, alors $(u_n)_n$ convergera vers la solution de $f(x) = x$ (Point fixe de f).

Plan de travail d'une suite réccurente $u_{n+1} = f(u_n)$

- Définition de la suite ;
- Etude des points fixes de f ;
- Etude de la monotonie de la fonction f.

Exemple

$$u_0 = \frac{\pi}{4} \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$u_{n+1} = \sin(u_n)$$

Plan

1. Définitions et généralités
   - Définition
   - Suites explicites
   - Suites définies par récurrence
   - Suites bornées
2. Techniques pour prouver qu'une suite est bornée
   - Technique fonctionnelle pour les suites du type $u_n = f(n)$
   - Technique algébrique
   - Technique par récurrence : pratique pour les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Limite d'une suite réelle
   - Définitions générales
   - Propriétés des suites admettant une limite

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite croissante.

1. *$(u_n)_n$ est majorée $\Rightarrow$ $(u_n)_n$ converge.*
2. *$(u_n)_n$ est non majorée $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$*

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite croissante.

1. $(u_n)_n$ *est majorée* $\Rightarrow$ $(u_n)_n$ *converge.*
2. $(u_n)_n$ *est non majorée* $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante.

1. *$(u_n)_n$ est minorée $\Rightarrow$ $(u_n)_n$ converge.*
2. *$(u_n)_n$ est non minorée $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$*

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante.

1. $(u_n)_n$ *est minorée* $\Rightarrow$ $(u_n)_n$ *converge.*
2. $(u_n)_n$ *est non minorée* $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exemple

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$
2. $u_n = (\frac{n}{\ln n})_{n \geq 2}$

Exemple

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$
2. $u_n = \left(\frac{n}{\ln n}\right)_{n\geq 2}$

Suites adjacentes

Définition

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles.
$(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites adjacentes ssi

1. $(u_n)_n$ est croissante.
2. $(v_n)_n$ est décroissante.
3. $(u_n - v_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini .

Suites adjacentes

Définition

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles.
$(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites adjacentes ssi

1. $(u_n)_n$ est croissante.
2. $(v_n)_n$ est décroissante.
3. $(u_n - v_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini .

Suites adjacentes

Définition

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles.
$(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites adjacentes ssi

1. $(u_n)_n$ est croissante.
2. $(v_n)_n$ est décroissante.
3. $(u_n - v_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini .

Suites adjacentes

Définition

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles.
$(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites adjacentes ssi

1. $(u_n)_n$ est croissante.
2. $(v_n)_n$ est décroissante.
3. $(u_n - v_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini .

Proposition

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites adjacentes, alors

1. $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes.
2. $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite l.
3. de plus on a :

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq ..... \leq u_n \leq l \leq v_n \leq v_{n-1} \leq ... \leq v_1 \leq v_0.$$

Proposition

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites adjacentes, alors

1. *$(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes.*
2. *$(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite l.*
3. *de plus on a :*

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq ..... \leq u_n \leq l \leq v_n \leq v_{n-1} \leq ... \leq v_1 \leq v_0.$$

Proposition

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites adjacentes, alors

1. *$(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes.*
2. *$(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite l.*
3. *de plus on a :*

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq ..... \leq u_n \leq l \leq v_n \leq v_{n-1} \leq ... \leq v_1 \leq v_0.$$

Proposition

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites adjacentes, alors

1. *$(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes.*
2. *$(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite l.*
3. *de plus on a :*

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq ..... \leq u_n \leq l \leq v_n \leq v_{n-1} \leq ... \leq v_1 \leq v_0.$$

Exemple

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$

Définition

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. On dit que $(v_n)_n$ est une suite extraite (ou sous-suite) de $(u_n)_n$ ssi il existe une application

$$\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

strictement croissante telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$

Exemple

1. u_{2n} u_{3n+1} u_{n^2} u_{6n+13} sont des suites extraites.
2. $u_{1/n}$ u_{n^2-3n} $u_{3n-1/2}$ ne sont pas des suites extraites.

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, alors toute sous-suite de $(u_n)_n$ converge vers la même limite l.

REMARQUE :
Dans la pratique, pour montrer qu'une suite diverge, on utilise la contraposée de la proposition.

- Si il existe deux sous-suites de $(u_n)_n$ de limites différentes, alors la suite $(u_n)_n$ diverge.
- Si il existe une sous-suite de $(u_n)_n$ divergente, alors la suite $(u_n)_n$ diverge.

REMARQUE :
Dans la pratique, pour montrer qu'une suite diverge, on utilise la contraposée de la proposition.

- Si il existe deux sous-suites de $(u_n)_n$ de limites différentes, alors la suite $(u_n)_n$ diverge.
- Si il existe une sous-suite de $(u_n)_n$ divergente, alors la suite $(u_n)_n$ diverge.

REMARQUE :
Dans la pratique, pour montrer qu'une suite diverge, on utilise la contraposée de la proposition.

- Si il existe deux sous-suites de $(u_n)_n$ de limites différentes, alors la suite $(u_n)_n$ diverge.
- Si il existe une sous-suite de $(u_n)_n$ divergente, alors la suite $(u_n)_n$ diverge.

Exemple

1. $u_n = (-1)^n$
2. $u_n = \cos(n\pi/2)$

Exemple

1. $u_n = (-1)^n$
2. $u_n = \cos(n\pi/2)$

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique

1. *Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite l alors $(u_n)_n$ converge vers la limite l.*
2. *Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent alors $(u_n)_n$ converge .*

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique

1. *Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite l alors $(u_n)_n$ converge vers la limite l.*
2. *Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent alors $(u_n)_n$ converge .*

Théorème de Bolzano-weistrass

Théorème

De toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Critère de Cauchy

Définition

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique, on dit que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy si

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, N(\varepsilon) > 0, \quad \forall\, p, q \quad > N(\varepsilon) \quad |u_p - u_q| < \varepsilon$$

Proposition

1. *Toute suite de Cauchy est bornée.*
2. *(u_n) est de Cauchy si et seulement si $(u_n)_n$ est convergente.*

Proposition

1. *Toute suite de Cauchy est bornée.*
2. *(u_n) est de Cauchy si et seulement si $(u_n)_n$ est convergente.*

Exemple

1. Montrer que $u_{n+1} = u_n + \dfrac{\sin n}{2^n}$ est une suite de Cauchy.
2. Montrer que $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ n'est pas une suite de Cauchy.

   Indication : Montrer que $\forall n \geq 1,\ u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.

Exemple

1. Montrer que $u_{n+1} = u_n + \dfrac{\sin n}{2^n}$ est une suite de Cauchy.
2. Montrer que $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ n'est pas une suite de Cauchy.

   Indication : Montrer que $\forall n \geq 1,\ u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.

Plan

1. Définitions et généralités
   - Définition
   - Suites explicites
   - Suites définies par récurrence
   - Suites bornées
2. Techniques pour prouver qu'une suite est bornée
   - Technique fonctionnelle pour les suites du type $u_n = f(n)$
   - Technique algébrique
   - Technique par récurrence : pratique pour les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Limite d'une suite réelle
   - Définitions générales
   - Propriétés des suites admettant une limite

Suites arithmétiques

Définition

On dit que $(u_n)_n$ est une suite arithmétique, de raison $r \in \mathbf{R}$ et de premier terme u_0, si $(u_n)_n$ vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Terme général d'une suite arithmétique

On a :

$$u_n = u_0 + nr\,.$$

D'une manière générale, on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r\,.$$

Terme général d'une suite arithmétique

On a :

$$u_n = u_0 + nr\,.$$

D'une manière générale, on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r\,.$$

Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, on note S_n la somme des n premiers termes. On a :

$$S_n = \frac{n}{2}(u_0 + u_{n-1}).$$

Limite d'une suite arithmétique

Proposition

La suite $u_n = u_0 + nr$

1. *Diverge vers* $+\infty$ *si et seulement si* $r > 0$.
2. *Diverge vers* $-\infty$ *si et seulement si* $r < 0$.

Limite d'une suite arithmétique

Proposition

La suite $u_n = u_0 + nr$

1. *Diverge vers* $+\infty$ *si et seulement si* $r > 0$.
2. *Diverge vers* $-\infty$ *si et seulement si* $r < 0$.

Plan

1. Définitions et généralités
   - Définition
   - Suites explicites
   - Suites définies par récurrence
   - Suites bornées
2. Techniques pour prouver qu'une suite est bornée
   - Technique fonctionnelle pour les suites du type $u_n = f(n)$
   - Technique algébrique
   - Technique par récurrence : pratique pour les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Limite d'une suite réelle
   - Définitions générales
   - Propriétés des suites admettant une limite

Suites géométriques

Définition

On dit que $(u_n)_n$ est une suite géométrique, de raison $q \in \mathbf{R}$ et de premier terme u_0, si $(u_n)_n$ vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = qu_n.$$

Terme général d'une suite géométrique

On a :

$$u_n = q^n u_0.$$

D'une manière générale, on a :

$$u_n = q^{(n-k)} u_k.$$

Terme général d'une suite géométrique

On a :

$$u_n = q^n u_0.$$

D'une manière générale, on a :

$$u_n = q^{(n-k)} u_k.$$

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0, on note S_n la somme des n premiers termes.

$$S_n = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

En particulier, on a:

$$\sum_{k=m}^{n} q^k = q^m \sum_{k=0}^{n-m} q^k = q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}.$$

Limite d'une suite géomètrique

Proposition

La suite $u_n = q^n u_0$

1. *Converge vers* 0 *si et seulement si* $|q| < 1$.
2. *Converge vers* u_0 *si et seulement si* $q = 1$.
3. *Diverge vers* $+\infty$ *si et seulement si* $q > 1$.
4. *Ne possède pas de limite si et seulement si* $q \leq -1$.

Limite d'une suite géomètrique

Proposition

La suite $u_n = q^n u_0$

1. *Converge vers* 0 *si et seulement si* $|q| < 1$.
2. *Converge vers* u_0 *si et seulement si* $q = 1$.
3. *Diverge vers* $+\infty$ *si et seulement si* $q > 1$.
4. *Ne possède pas de limite si et seulement si* $q \leq -1$.

Limite d'une suite géomètrique

Proposition

La suite $u_n = q^n u_0$

1. *Converge vers* 0 *si et seulement si* $|q| < 1$.
2. *Converge vers* u_0 *si et seulement si* $q = 1$.
3. *Diverge vers* $+\infty$ *si et seulement si* $q > 1$.
4. *Ne possède pas de limite si et seulement si* $q \leq -1$.

Limite d'une suite géomètrique

Proposition

La suite $u_n = q^n u_0$

1. *Converge vers* 0 *si et seulement si* $|q| < 1$.
2. *Converge vers* u_0 *si et seulement si* $q = 1$.
3. *Diverge vers* $+\infty$ *si et seulement si* $q > 1$.
4. *Ne possède pas de limite si et seulement si* $q \leq -1$.

Plan

1. Définitions et généralités
   - Définition
   - Suites explicites
   - Suites définies par récurrence
   - Suites bornées
2. Techniques pour prouver qu'une suite est bornée
   - Technique fonctionnelle pour les suites du type $u_n = f(n)$
   - Technique algébrique
   - Technique par récurrence : pratique pour les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Limite d'une suite réelle
   - Définitions générales
   - Propriétés des suites admettant une limite

Suites arithmético-géométriques

Définition

On dit que $(u_n)_n$ est une suite arithmético-géométrique, toute suite de la forme $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Si $b = 0$ c'est une suite géométrique de raison a.
2. Si $a \neq 1$, alors la suite $v_n = (u_n - \frac{b}{1-a})$ est une suite géométrique de raison a .
3. Si $a = 0$ c'est une suite constante .

Suites arithmético-géométriques

Définition

On dit que $(u_n)_n$ est une suite arithmético-géométrique, toute suite de la forme $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Si $b = 0$ c'est une suite géométrique de raison a.
2. Si $a \neq 1$, alors la suite $v_n = (u_n - \frac{b}{1-a})$ est une suite géométrique de raison a .
3. Si $a = 0$ c'est une suite constante .

Suites arithmético-géométriques

Définition

On dit que $(u_n)_n$ est une suite arithmético-géométrique, toute suite de la forme $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Si $b = 0$ c'est une suite géométrique de raison a.
2. Si $a \neq 1$, alors la suite $v_n = (u_n - \frac{b}{1-a})$ est une suite géométrique de raison a .
3. Si $a = 0$ c'est une suite constante .

Suites arithmético-géométriques

Définition

On dit que $(u_n)_n$ est une suite arithmético-géométrique, toute suite de la forme $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Si $b = 0$ c'est une suite géométrique de raison a.
2. Si $a \neq 1$, alors la suite $v_n = (u_n - \frac{b}{1-a})$ est une suite géométrique de raison a .
3. Si $a = 0$ c'est une suite constante .

Plan

1. Définitions et généralités
   - Définition
   - Suites explicites
   - Suites définies par récurrence
   - Suites bornées
2. Techniques pour prouver qu'une suite est bornée
   - Technique fonctionnelle pour les suites du type $u_n = f(n)$
   - Technique algébrique
   - Technique par récurrence : pratique pour les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Limite d'une suite réelle
   - Définitions générales
   - Propriétés des suites admettant une limite

Suites récurrentes d'ordre 1

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite définie par :

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ et } u_0 \text{ donné}$$

où f est une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$.

Si $(u_n)_n$ converge vers l et f est continue sur $[a, b]$, alors l est un point fixe de f. C'est à dire

$$f(l) = l.$$

Suites récurrentes d'ordre 1

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite définie par :

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ et } u_0 \text{ donné}$$

où f est une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$.

Si $(u_n)_n$ converge vers l et f est continue sur $[a, b]$, alors l est un point fixe de f. C'est à dire

$$f(l) = l.$$

Plan

1. Définitions et généralités
   - Définition
   - Suites explicites
   - Suites définies par récurrence
   - Suites bornées
2. Techniques pour prouver qu'une suite est bornée
   - Technique fonctionnelle pour les suites du type $u_n = f(n)$
   - Technique algébrique
   - Technique par récurrence : pratique pour les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Limite d'une suite réelle
   - Définitions générales
   - Propriétés des suites admettant une limite

Suites récurrentes affine d'ordre 2

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite définie par la donnée de u_0 et u_1 et

$$u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$$

L'équation

$$r^2 - ar - b$$

est appelée équation caractéristique associée à $(u_n)_n$.

Soit $\Delta = a^2 + 4b$.

1. Si $\Delta > 0$; r_1 et r_2 sont réelles et $u_n = \alpha.r_1^n + \beta.r_2^n$.
2. Si $\Delta < 0$; r_1 et r_2 sont complexes et $u_n = r^n(\alpha.\cos(n\theta) + \beta.\sin(n\theta)$; ou $r = |r_i|$ et $\theta = arg(r_i)$
3. Si $\Delta = 0$; $u_n = r^n(\alpha.n + \beta)$.

α et β sont définis à partir de u_0 et u_1 dits conditions initiales.

Soit $\Delta = a^2 + 4b$.

1. Si $\Delta > 0$; r_1 et r_2 sont réelles et $u_n = \alpha.r_1^n + \beta.r_2^n$.

2. Si $\Delta < 0$; r_1 et r_2 sont complexes et $u_n = r^n(\alpha.\cos(n\theta) + \beta.\sin(n\theta)$; ou $r = |r_i|$ et $\theta = arg(r_i)$

3. Si $\Delta = 0$; $u_n = r^n(\alpha.n + \beta)$.

α et β sont définis à partir de u_0 et u_1 dits conditions initiales.

Soit $\Delta = a^2 + 4b$.

1. Si $\Delta > 0$; r_1 et r_2 sont réelles et $u_n = \alpha.r_1^n + \beta.r_2^n$.

2. Si $\Delta < 0$; r_1 et r_2 sont complexes et $u_n = r^n(\alpha.\cos(n\theta) + \beta.\sin(n\theta)$; ou $r = |r_i|$ et $\theta = arg(r_i)$

3. Si $\Delta = 0$; $u_n = r^n(\alpha.n + \beta)$.

α et β sont définis à partir de u_0 et u_1 dits conditions initiales.